Leçon 157 : Matrices symétriques réelles
Matrices hermitiennes

Références : Gourdon, Rombaldi, Caldero (Nouvelles ...), Rouvière, Chabond

I - Généralités sur les matrices symétriques et hermitiennes

1) Définitions et premières propriétés

2) Lien avec les formes bilinéaires symétriques et hermitiennes

II - Réductions et décompositions

1) Théorème spectral

2) Réduction d'une forme quadratique

3) Décomposition polaire

4) Décompositions LU, de Cholesky et QR

III - Applications

1) Calcul différentiel

2) Vecteurs Gaussiens

DEV 1 : Critère de Sylvester

DEV 2 : Homéomorphisme de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

Leçon 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Soit E un K-espace vectoriel avec $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\dim(E)=n\in\mathbb{N}^*$.

I - Généralités sur les matrices symétriques et hermitiennes

1) Définitions et premières propriétés [GOU]

DEF 1 : On dit que $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique lorsque ${}^tA=A$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques.
On dit que A est antisymétrique lorsque ${}^tA=-A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques.

DEF 2 : On dit que $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne lorsque $A={}^t\bar{A}$.
On note $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble de ces matrices.

PROP 3 : $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

EX 4 : $\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; $\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$

PROP 5 : On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

PROP 6 : $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))=\frac{n(n-1)}{2}$.
$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n(\mathbb{C}))=n^2$

DEF 7 : On dit que $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive (resp. définie positive) lorsque pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX\geq 0$ $(X\neq 0)$ (resp. ${}^tXAX>0$)
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies positives.

DEF 8 : On définit de même :
$\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})=\{A\in\mathcal{H}_n(\mathbb{C})\mid \forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X\neq 0\Rightarrow {}^t\bar{X}AX\geq 0\}$
et $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})=\{A\in\mathcal{H}_n(\mathbb{C})\mid \forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X\neq 0\Rightarrow {}^t\bar{X}AX>0\}$.

2) Lien avec les formes bilinéaires symétriques et hermitiennes [GOU]

DEF 9 : On dit que $\varphi : E\times E\to K$ est bilinéaire lorsque pour tout $x\in E$, $y\mapsto\varphi(x,y)$ est linéaire et pour tout $y\in E$, $x\mapsto\varphi(x,y)$ est linéaire. On dit que φ est symétrique lorsque pour tous $(x,y)\in E\times E$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.

DEF 10 : On dit que $\varphi : E^2\to K$ est sesquilinéaire lorsque pour tout $x\in E$, $y\mapsto\varphi(x,y)$ est linéaire et pour tout $y\in E$, pour $\lambda\in K$, pour tout $x,x'\in E$, $\varphi(x+\lambda x',y)=\varphi(x,y)+\bar{\lambda}\varphi(x',y)$.
On dit que φ est hermitienne lorsque pour tous $(x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$.

REM 11 : Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, toute forme sesquilinéaire est bilinéaire.

EX 12 : Si $E=\mathcal{C}([0;1],\mathbb{C})$, $\varphi : E^2\to\mathbb{C}$, $(f,g)\mapsto\int_0^1\overline{f(t)}g(t)\,dt$ définit une forme sesquilinéaire sur E^2.

DEF 13 : Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\varphi : E^2\to K$ bilinéaire. La matrice de φ est $M=(\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(K)$
Alors : $\forall X,Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(x,y)={}^tXMY$.
Si φ est sesquilinéaire, $\varphi(x,y)={}^t\bar{X}MY$.

PROP 14 : Deux matrices M,M' représentant la même forme bilinéaire dans deux bases différentes sont dites congruentes. Dans ce cas : $\exists P\in GL_n(K)$, $M'={}^tPMP$.

PROP 15 : Soit φ une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire). φ est symétrique (resp. hermitienne) si et seulement si sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E est symétrique (resp. hermitienne).

DEF 16 : On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme $q : E\to K$, $x\mapsto\varphi(x,x)$ où φ est une forme bilinéaire.
On note $Q(E)$ leur ensemble

DEF 17 : Une forme hermitienne sur E est une application $q : E\to K$, $x\mapsto\varphi(x,x)$ où φ est sesquilinéaire.

PROP 18 : Soit q une forme quadratique (resp. hermitienne) sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) φ telle que pour tout $x\in E$, $q(x)=\varphi(x,x)$. φ s'appelle la forme polaire de q.

DEF 19 : La matrice dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E d'une forme quadratique ou hermitienne est celle de sa forme polaire. Son rang est le rang de cette matrice (qui ne dépend pas de la base).

EX 20 : Soit $q : u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto 3x^2+y^2+2xy-3xz$
Alors $A=\mathrm{Mat}_{(can)}(q)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 1 & 0\\ -\frac{3}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$.

II - Réductions et décompositions

1) Théorème spectral [GOU][ROM]

PROP 21: Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique ou hermitienne sont réelles.

NOT. 22: Pour $M \in \mathcal{M}_n(K)$, on désigne par M^* sa transposée lorsque $K = \mathbb{R}$ ou sa transconjuguée lorsque $K = \mathbb{C}$.

THM 23: (spectral) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $A^* = A$. Il existe une matrice inversible P telle que P^*AP soit diagonale.

REM 24: Une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable : $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

DEV 1

COR 24: Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$).

THM 25. (Sylvester) Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

REM 26: Ce résultat se généralise à $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

THM 27: Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^I$. Ces matrices commutent deux à deux si et seulement si il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in I$, ${}^tPA_iP$ est diagonale.

2) Réduction d'une forme quadratique [ROM]

DEF 28: On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est q-orthogonale lorsque pour tout $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

THM 29: Soit $q \in Q(E)$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E q-orthogonale.

THM 30: • Si $K = \mathbb{C}$, deux matrices symétriques sont congruentes si et seulement si elles ont même rang.
• (Sylvester). Si $K = \mathbb{R}$, deux matrices symétriques sont congruentes si et seulement si elles ont même signature.
• Si $K = \mathbb{F}_q$ est un corps fini, deux matrices symétriques inversibles sont congruentes si et seulement si elles ont même discriminant.

REM 31: En pratique on décompose $q \in Q(E)$ en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes grâce à la méthode de Gauss. Cela permet d'obtenir sa signature, son rang et une base q-orthogonale.

3) Décomposition polaire [CAL]

LEMME 32: L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles orthogonales est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

THM 33: (Décomposition polaire) La multiplication matricielle induit des homéomorphismes

① $\mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} GL_n(\mathbb{R})$
$(O, S) \longmapsto OS$

② $\mu : \mathcal{U}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$
$(U, H) \longmapsto UH$

REM 34: Un résultat important est retenu : Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ il existe une unique $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $B^2 = A$. De même pour $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

DEV 2

LEMME 35: $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = \rho(A)$ où $|||A||| = \sup \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ et $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$.

THM 36: $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

THM 37: $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme

COR 38: On a les homéomorphismes : $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et $GL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$

4) Décompositions LU, de Cholesky et QR [ROM]

THM 39: Une matrice $A \in GL_n(K)$ admet une décomposition $A = LU$ où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure si et seulement si tous ses mineurs principaux sont non nuls. Lorsqu'elle existe, une telle décomposition est unique.

THM 40: (Cholesky) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = B^tB$ où B est triangulaire inférieure inversible.

REM 41: Ces décompositions sont utiles pour résoudre des systèmes linéaires.

THM 42 : Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QR$ où $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

REM 43 : Une idée directrice des démonstrations consiste à considérer ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

III - Applications

1) Calcul différentiel [GOU] [ROU]

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$

DEF 44 : On appelle matrice hessienne de f en $a \in U$ la matrice $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. C'est la matrice de $d^2f(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

THM 45 (Schwarz) : Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U alors pour $1 \leq i,j \leq n$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

COR 46 : L'application $d^2f(a)$ est bilinéaire symétrique et donc $H_f(a)$ est symétrique.

DEF 47 : On dit que $a \in U$ est un point critique de f lorsque $df(a) = 0$.

PROP 48 : Si f admet un extremum relatif en $a \in U$, alors $df(a) = 0$

THM 49 : Soit $a \in U$ tel que $df(a) = 0$.
- Si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a, $H_f(a)$ est positive (resp. négative)
- Si $H_f(a)$ est définie positive (resp. négative), alors f admet un minimum (resp. maximum) en a.

REM 50 : En dimension 2, la trace et le déterminant suffisent à connaître le signe des valeurs propres de $H_f(a)$

2) Vecteurs Gaussiens [CHA]

DEF 51 : Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont de carré intégrable. On définit son vecteur moyenne : $E[X] = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{pmatrix}$ et sa matrice de dispersion (ou de covariance) par : $Var(X) = E[(X - E[X])\,{}^t(X - E[X])]$

$$Var(X) = \begin{pmatrix} Var(X_1) & cov(X_1,X_2) & \cdots & cov(X_1,X_n) \\ cov(X_2,X_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ cov(X_n,X_1) & \cdots & & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

THM 52 : La matrice de dispersion d'un vecteur aléatoire est symétrique définie positive.

THM 53 : Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$. Alors, pour $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, $AX \in \mathbb{R}^q$ a pour vecteur moyenne Am et pour matrice $A\Gamma{}^tA$ où $\Gamma = Var(X)$.

DEF 54 : Un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ est dit Gaussien lorsque toute combinaison linéaire de ses composantes est ~~de~~ loi Gaussienne (incluant les constantes).

THM 55 : Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Alors X est Gaussien $\Leftrightarrow$, $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $E[e^{iuX}] = \exp(ium - \frac{1}{2}{}^tu\Gamma u)$

THM 56 : Soit X un vecteur Gaussien de $\mathbb{R}^d$. LASSE :
1) $X_1, \ldots, X_d$ sont mutuellement indépendantes
2) $X_1, \ldots, X_d$ sont 2 à 2 indépendantes
3) $\Gamma = Var(X)$ est diagonale.